

静电场 II

有源场: 从正电荷出发, 终止于负电荷

单值性: 在无点电荷的空间, 任意两条电场线均不会相交

电通量: 均匀电场中穿过与电场垂直的平面 S 的电场线总数

$$\phi_e = ES$$

$$d\phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cos\theta dS \Rightarrow \phi_e = \iint_S d\phi_e = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

高斯定理: 在真空中, 静电场通过任意闭合曲面的电通量,

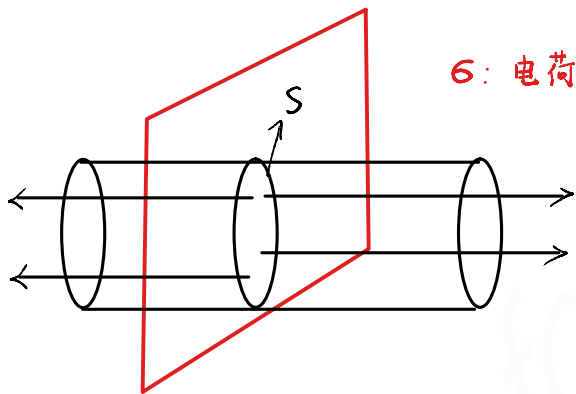
等于曲面内所包围的自由电荷代数和除以真空介电常数

点电荷系: $\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$

连续分布带电体: $\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$

The application of Gauss's theorem:

均匀带电无限大平面的电场



6: 电荷面密度

$$\begin{cases} \phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ = 2ES = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0} \\ \Sigma q = \sigma S \\ \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{cases}$$

静电场的环路定理:

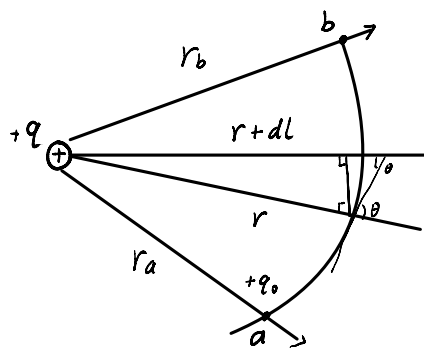
点电荷电场中电场力做功:

$$\begin{aligned} dA &= \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 E \cos\theta dl \\ &= q_0 E dr \end{aligned}$$

$$\text{则 } A_{ab} = \int_a^b dA = \int_{r_a}^{r_b} \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$A_{ab} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

任意带电体电场中电场力做功:



电势能：

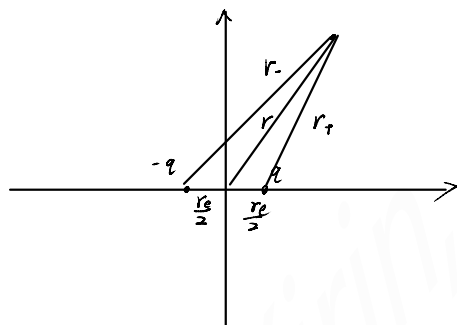
$$A_{ab} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - (W_b - W_a) = -\Delta W = W_a - W_b$$

电势：某点电势能 W_a 与 q_0 之比，仅取决于电场

$$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

点电荷电场中的电势：

$$U_r = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



$$U_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

$$\begin{cases} r_+ \approx r - \frac{r_0}{2} \cos\theta \\ r_- \approx r + \frac{r_0}{2} \cos\theta \end{cases}$$

等势面性质：

1. 等势面与电场线处处正交

电势：“单位电荷的电势能”

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

$$= -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

电场：“单位电荷的受力”

$$F_x = E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \dots$$

$$\vec{E} = -\nabla U$$

电势能

q_0 从 a 点移至 b 点时, 电场力作的功等于电势能增量的负值:

$$A_{ab} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -(W_b - W_a) = -\Delta W$$

若选定 b 点为静电势能的零点, 用 "0" 表示, 则

$$W_a = A_{ab} = q_0 \int_a^{0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电势 $\rightarrow$ 某点电势能 W_a 与 q_0 之比

$$U_a = W_a / q_0 = \int_a^{0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电势差: $U_{ab} = U_A - U_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$

点电荷电场中的电势:
$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \\ U_r = \int_r^{0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{cases}$$

点电荷系电场中的电势: $U_p = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$

电荷连续分布带电体电场中的电势
$$\begin{cases} dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \\ \text{or } U = \int dU = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \\ U = \int_p^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} \end{cases}$$

等势面性质:

1. 等势面与电场线处处正交
2. 等势面密集的地方场强大, 稀疏处场强小

场强与电势的关系:

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}\right) = -\nabla U$$

静电场中的导体:

导体的静电平衡:

静电感应: 在静电场力作用下, 导体中自由电子在电场力的作用下作宏观定向运动, 使电荷产生重新分布的现象。

$$\begin{cases} \vec{E}_i = \vec{E} + \vec{E}' = 0 \text{ 时, 导体处于静电平衡状态!} \\ \text{此时导体内部和表面都无电荷定向运动!} \end{cases}$$

静电平衡条件:

电场 $\begin{cases} \text{导体内部场强处处为零} \\ \text{表面场强垂直于导体表面} \end{cases}$

电势 $\begin{cases} \text{导体为等势体} \\ \text{导体表面是一个等势面} \end{cases}$

静电平衡时导体上的电荷分布：

1. 带电导体静电平衡，导体内部无净电荷，仅分布在导体表面
2. 导体表面电荷面密度与表面邻近处的场强成正比

静电场中的导体

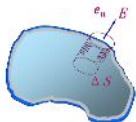
二. 静电平衡时导体上的电荷分布

2. 导体表面电荷面密度与表面邻近处的场强成正比。

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_n$$



?

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\text{则 } \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_n$$

3. 曲率大，电荷面密度大；曲率小，电荷面密度小；
曲率负，电荷面密度更小

空腔导体内外的静电场

- 空腔内表面的电荷代数和为零
- 内表面无电荷存在
- 导体内部及空腔内的场强等于零

当导体空腔内有电荷时，导体内外表面会激发出电荷。

腔内电荷位置不影响导体外表面的电荷分布。

静电屏蔽

特点：

1. 外电场不影响空腔导体内部。
2. 内电场不影响空腔导体外部。

应用：

1. 高压带电作业，金属丝网制成的均压服；
2. 电气设备金属罩接地；
3. 人体电信号的提取，信号数量级在 mV、μV，装置、导线用金属丝网屏蔽。

孤立导体的电容

孤立球形导体的电势: $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$

孤立球形导体的电容: $C = \frac{q}{U} = 4\pi\epsilon_0 R$

$C_{\text{earth}} = 4\pi\epsilon_0 R \approx 0.001 \text{ F} \quad (R = 6400 \text{ km})$

电容器的电容

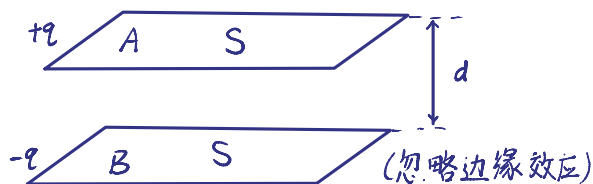
→ 任一导体所带电量

$$C = \frac{Q}{U_A - U_B} \rightarrow \text{两导体间的电势差}$$

电容器的主要性能指标: 电容器、耐压

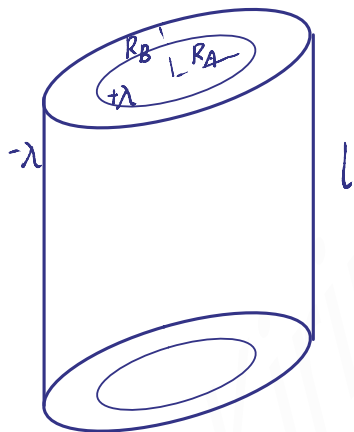
电容器电容的计算

平行板电容器



$$\begin{cases} E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ U_A - U_B = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{qd}{\epsilon_0 S} \\ C = \frac{q}{U_A - U_B} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \end{cases}$$

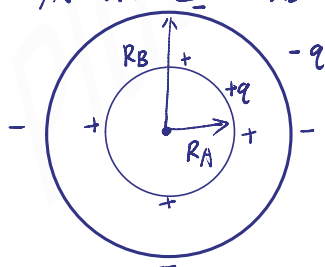
圆柱形电容器



$$\begin{cases} E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{由高斯定理}) \\ U_A - U_B = \int_{R_A}^{R_B} \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ = \int_{R_A}^{R_B} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_B}{R_A} \\ C = \frac{Q}{U_A - U_B} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(R_B/R_A)} \end{cases}$$

$l \gg (R_B - R_A)$, 忽略边缘效应

球形电容器



$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \\ U_A - U_B = \int_{R_A}^{R_B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) \\ C = \frac{q}{U_A - U_B} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_B R_A}{R_B - R_A} \end{cases}$$

当 $R_B \gg R_A$ 时, $R_B \rightarrow \infty$, $C \rightarrow 4\pi\epsilon_0 R_A$

电容器的串联和并联

等值电容: 多个电容器连接后, 它们所带电量与两端电势差之比, 称为它们的等值电容.

串联: $\frac{1}{C} = \frac{U_A - U_B}{Q} = \frac{\sum U_i}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$

电容减小, 耐压增加

并联: $C = \frac{Q}{U_A - U_B} = \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_n}{U_A - U_B} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

并联增加总电容, 耐压值等于其中最低的耐压值

电介质对电场的影响

断电后电荷 Q_0 不变, 电容变为原来的 ϵ_r (电介质的相对介电常数) 倍:

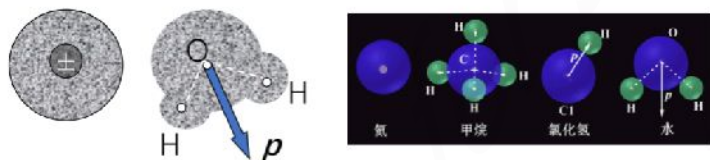
$$U = \frac{U_0}{\epsilon_r}, \quad C = \frac{Q_0}{U} = \frac{\epsilon_r Q_0}{U_0} = \epsilon_r C_0$$

场强减小: $E = \frac{U}{d} = \frac{U_0}{\epsilon_r d} = \frac{E_0}{\epsilon_r}$

电介质的极化

有极分子和无极分子: 原子的正负电中心重合, 每个原子的电偶极矩为零。几个原子构成分子时, 正负电中心可重合, 可不重合, 前者称**无极分子**, 后者称**有极分子**。

对有极分子, 正负电荷中心组成**等效分子电偶极矩** $\vec{p}$, 对大量分子的等效电偶极矩之和 $\sum \vec{p} \neq 0$ 。对无极分子 $\vec{p} = 0$ 。



束缚电荷或极化电荷: 电介质在外场中, 在与外场 E_0 的垂直的表面层里出现正负电荷层, 这些电荷不能自由移动

电极化强度矢量、极化电荷面密度

电极化强度矢量: 单位体积内分子电偶极矩的矢量和

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V}$$

电介质极化时的极化电荷面密度等于极化强度沿外法线方向的分量

$$\sigma' = |\vec{P}| \cos \theta = P_n = \vec{P} \cdot \vec{e}_n$$

实验表明, 对大多数各向同性电介质:

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

介质的电极化率

电介质中的场强

$$\begin{cases} \text{自由电荷的场强: } |E_0| = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \\ \text{束缚电荷的场强: } |E'| = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \end{cases}$$

合电场的场强为 $E = E_0 - E' = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\epsilon_0}$

因 $\sigma' = P = \chi_e \epsilon_0 E \Rightarrow E = \frac{E_0}{1 + \chi_e}$

$$\begin{cases} U = Ed = \frac{\sigma_0 d}{\epsilon_0 (1 + \chi_e)} \\ q = \sigma_0 S \\ C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon_0 (1 + \chi_e) S}{d} = (1 + \chi_e) C_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_r = 1 + \chi_e \\ \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \end{cases}$$

有电介质时的高斯定理 电位移矢量 D

定义电位移矢量: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

对各向同性介质: $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

点电荷间的相互作用能

系统能量: $W = \frac{1}{2} q_1 U_1 + \frac{1}{2} q_2 U_2$

推广到 n 个点电荷: $W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i U_i$

电荷连续分布时的静电能

$$\begin{cases} \text{电荷体: } W = \frac{1}{2} \iiint_V U \rho dV \\ \text{电荷面: } W = \frac{1}{2} \iint_S U \sigma dS \end{cases}$$

电容器所带的静电能:

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C (U_A - U_B)^2 = \frac{1}{2} Q (U_A - U_B)$$

孤立导体所带的静电能: $W = \frac{1}{2} Q U$

静电的能量

将 $U_{AB} = E d$, $C = \epsilon \frac{S}{d}$ 代入电容器静电能公式:

$$W = \frac{1}{2} C U_{AB}^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 S d = \frac{1}{2} \epsilon E^2 V$$

$$\Rightarrow w_e = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} = \frac{1}{2} E D = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

$$W = \iiint_V w_e dV = \iiint_V \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} dV$$

电流、电流密度

电流: 电荷的定向移动。

产生条件: (1) 存在自由电荷。 (2) 存在电场。

载流子: 电荷的携带者: 自由电子、离子、电子-空穴对。

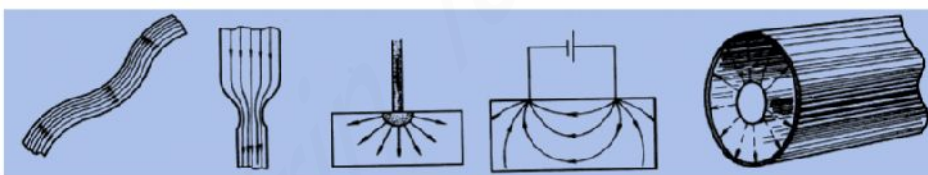
传导电流: 自由电子、空穴、离子在导体中定向移动形成。

运流电流: 电子、离子、带电体在空间的定向移动形成。

电流强度: 单位时间通过导体任一截面的电量 (标量),
单位: 安培 (A)

$$I = dq / dt$$

电流在导体不同截面或同一截面的不同部位可以有不同的分布, 见下图:



粗细, 材料均匀的金属导体

粗细不均匀的导线

半球形接地电极

电阻法探矿

同轴电缆的漏电流

电流密度: $\vec{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}}$

取导体内任一面元 dS , 其法线方向 n , 通过该面元的电流强度 dI 为:

$$dI = j dS_{\perp} = j dS \cos \theta = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

通过导体任意截面 S 的电流强度为:

$$I = \int_S j dS \cos \theta = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

电流场: $\vec{j}$ 形成的矢量场称为电流场

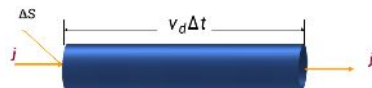
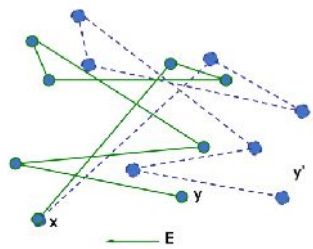
电流线的特点: (1) 切线方向为 $\vec{j}$ 的方向 (2) 密处 j 大, 疏处 j 小
(3) 两电流线互不相交

电流密度与漂移速度的关系：

漂移运动：

电子在电场作用下，除了作无规则热运动外，还将定向运动，这种定向运动的平均速度称为漂移速度 v_d 。

铜： $v_d \approx 10^{-5} \text{m/s}$ ，
热运动速度 $\approx 10^6 \text{m/s}$ 。



上图中设自由电子数密度 n ， Δt 时间内流出 ΔS 面的电荷 $\Delta q = en\Delta S v_d \Delta t$ ，

电流强度和电流密度的数值为：

$$I = en v_d \Delta S$$

$$j = \frac{I}{\Delta S} = en v_d$$

写成矢量式为：

$$\vec{j} = -en \vec{v}_d$$

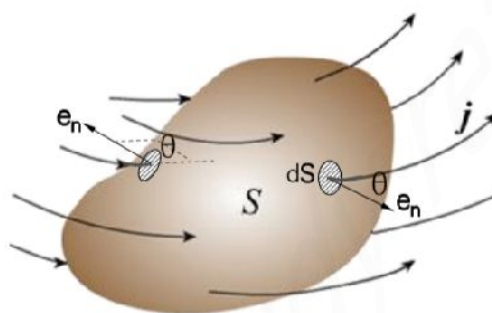
稳恒电流与稳恒电场

稳恒电流：导体中各点电流密度矢量不随时间变化。

电流连续性方程：

在导体内取一闭合曲面 S ，则 dt 时间从 S 面中流出的电量，等于 S 面内 dt 时间电量的减少量 $-dq$ ：

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$



上式称为**电流连续性方程**。

电流稳恒的条件：电流稳定后，空间电荷密度分布不随时间变化（ $dq/dt = 0$ ），对导体内任何区域 S ， S 内流出的电量等于流入的电量， S 内电量不变：

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

上式称为**电流稳恒条件**。

稳恒电场：在稳恒电流中电荷的分布不随时间变化，其相应的电场也不随时间变化。与静止电荷产生的电场相似，静电场中的规律、公式都适用，如高斯定理，环路定理。

稳恒电场与静电场的区别：

在静电场中：静电平衡时导体中 $E=0$ ，导体为等势体，无电流 $I=0$ ；

稳恒电场：导体中 $E \neq 0$

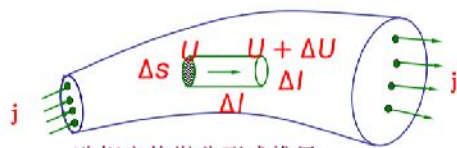
欧姆定律的微分形式*

金属材料的电阻率与温度的关系：

$$\rho_t = \rho_0 (1 + \alpha t)$$

欧姆定律只适用于一段截面均匀的导体，而对于电流密度分布不均匀的导体，如何研究其导电规律？

在导体中取一段底面积 ΔS ，长为 Δl ，平行于电流线的圆柱。



欧姆定律微分形式推导

上图中导体元两端的电势差 $\Delta U = E \Delta l$ ，通过的电流强度为 $\Delta I = j \Delta S$ ，根据欧姆定律：

$$E \Delta l = j \Delta S \Delta R$$

$$E \Delta l = j \Delta S \Delta R$$



$$j = \frac{\Delta l}{\Delta R \Delta S} E = \frac{1}{\rho} E = \gamma E$$

$$j = \gamma E$$

此式即为欧姆定律的微分形式。它是电磁理论的基本方程之一，对变化不太大的非稳恒电场也适用。

电源的电动势

$$\mathcal{E} = \frac{A_k}{q} = \oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

电源的路端电压

三、欧姆定律的微观解释

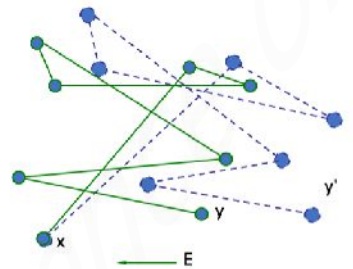
碰撞弛豫时间 τ ：

电子在两次碰撞事件之间，自由运动的平均时间。

漂移速度：

$$v_d = -\frac{eE\tau}{m}$$

$$j = -en v_d = \left(\frac{ne^2\tau}{m}\right) E \Rightarrow j = \gamma E$$



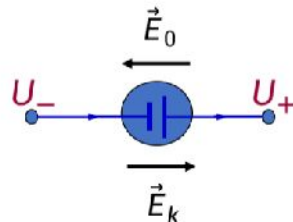
E 可以是静电场，也可以是任意满足 $F = qE$ 的非静电场！

指电源两极（外部）的电势差，按定义：

$$U_+ - U_- = \int_+^- \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}$$

电源内部合场强：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_k$$



如何将路端电压用电源电动势、电阻和电流表示？

电流 $\vec{j} = \gamma(\vec{E}_0 + \vec{E}_k)$ (γ 为电导率)

将 $\vec{E}_0 = \frac{j}{\gamma} - \vec{E}_k$ 代入，有：

$$\begin{aligned} U_+ - U_- &= \int_+^- \left(\frac{j}{\gamma} - \vec{E}_k\right) \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_+^- j \cdot d\vec{l} - \int_+^- \vec{E}_k \cdot d\vec{l} \\ &= \int_-^+ \vec{E}_k \cdot d\vec{l} - \int_-^+ I \rho \frac{dl}{S} \\ &= \mathcal{E} - IR \end{aligned}$$

第4讲 稳恒磁场 I

近代物理学指出磁矩来源于各原子中电子轨道磁矩和自旋磁矩的矢量和

$$\vec{p}_m = IS \vec{e}_n$$

磁感应强度

定义矢量函数 $\vec{B}(x, y, z)$

$$\begin{cases} \text{大小: } B = \frac{F_m}{qv} \\ \text{方向: } F_m \times v \\ SI: T; EMU: G \\ 1T = 1N/(A \cdot m) = 10^4 G \end{cases}$$

磁感应线 (磁力线)

磁感应线上任一点的切线方向和该点的磁场方向一致。磁感应线越密, 磁场越强。

磁感应线的特点:

- ① 闭合曲线, 涡旋场
- ② 环绕方向与电流方向服从右手螺旋法则

磁场的高斯定理

积分形式:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

说明磁场为无源场

磁通量 韦伯 (Wb)

对一给定平面, 磁通量为垂直穿过该平面的磁感应线总数

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{对整个曲面: } \phi = \int_S d\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

毕奥 - 萨伐尔 (Biot - Savart) 定律

电流元: $I d\vec{l}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

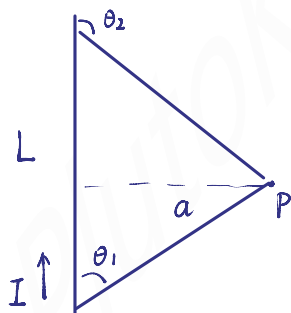
真空磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N \cdot A^{-2}$

$$\text{积分形式: } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\text{矢量形式: } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

→ 运动电荷的磁场, 仅在 $v \ll c$ 时成立

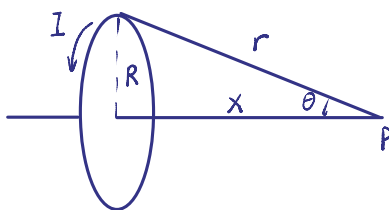
载流长直导线的磁场



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$\begin{cases} \text{当 } L \gg a, \\ \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi, \\ B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \end{cases}$$

载流圆线圈轴线上的磁场



$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{IS}{(R^2 + x^2)^{3/2}}, \quad S = \pi R^2$$

$$\text{引入 } \vec{p}_m = IS \vec{e}_n$$

$$\text{当 } x \gg R, \quad x \approx r$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{\vec{p}_m}{r^3}$$

载流直螺旋管内部的磁场

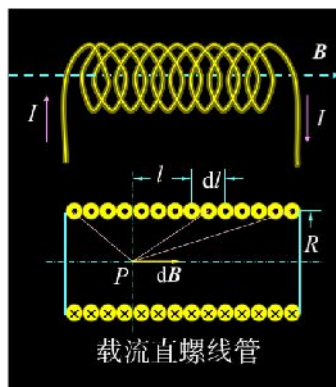
计算螺旋管内轴线上
P点的磁感应强度。

定义:

- 单位长度匝数 n
- 螺旋管半径 R

在螺旋管上取 dl ，相当于电流强度 $I n dl$ 的圆电流，它在P点产生的磁感应强度的大小为:

$$dB = \frac{\mu_0 I R^2 n dl}{2(R^2 + l^2)^{3/2}}$$



引入 β : P点到 dl 所引矢量与轴线间的夹角

$$\begin{cases} dl = -\frac{R d\beta}{\sin^2 \beta} \\ R^2 + l^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \beta} \end{cases}$$

$$dB = -\frac{\mu_0}{2} n I \sin \beta d\beta$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{2} n I (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

① $L \gg R$, $B = \mu_0 n I$

② $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\beta_2 \rightarrow 0$, $B = \frac{1}{2} \mu_0 n I$

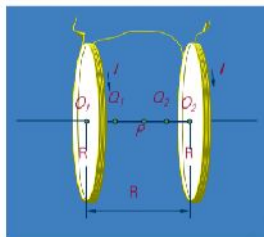
亥姆霍兹线圈

设两线圈半径 R ，间距也为 R ，各有 N 匝，电流为 I 。

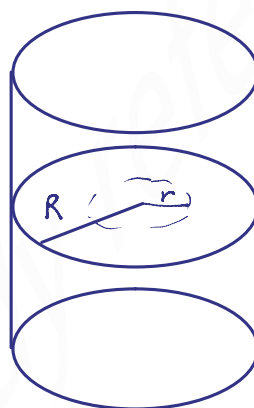
- 在圆心 O_1 、 O_2 处磁感应强度相等，大小为:

$$B_0 = \frac{\mu_0 N I}{2R} + \frac{\mu_0 N I R^2}{2(R^2 + R^2)^{3/2}} = 0.677 \frac{\mu_0 N I}{R}$$

- 两线圈轴线上中点P处的磁感应强度: $B_P = 0.716 \frac{\mu_0 N I}{R}$
- 在P点两侧的 Q_1 、 Q_2 点，磁感应强度: $B_Q = 0.712 \frac{\mu_0 N I}{R}$



长直圆柱形载流导线内外的磁场



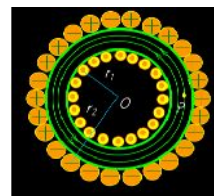
① 电流分布在导体表面

$$B \cdot 2\pi r = 0 \Rightarrow B = 0$$

② 电流均匀分布在截面上

$$B \cdot 2\pi r = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I r}{R^2}$$



载流螺旋环内的磁场

设环上线圈的总匝数为 N ，电流为 I ，

$$\text{则 } B \cdot 2\pi r = \mu_0 N I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

→ 电流的正负值由右手螺旋法则决定

→ 电流 I 只包括穿过环路的电流，

但定理中的磁场是环路内外的电流共同决定的

→ 说明磁场不是有势场

载流长直螺旋管内的磁场

管外磁场为 0

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 n l I_{AB}$$

静电场: 有源场, 无旋场; 稳恒磁场: 无源场, 有旋场

第5讲 稳恒磁场II

静电场	稳恒磁场
电场强度: $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^3} \vec{r}$ $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S \text{ 内}} q_i$ $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 有源、无旋场	磁感应强度: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$ $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L \text{ 内}} I$ 无源、有旋场

磁场的计算方法

1. 运动电荷的场

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

2. 毕奥-萨伐尔定律

$$\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

3. 安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L \text{ 内}} I$$

典型的带电体磁场

1. 无限长导体 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (r为场点与导线的距离)

2. 载流圆线圈圆心处 $B = \frac{\mu_0 I}{2r}$ (r为半径)

3. 载流长直螺线管 $B = \mu_0 n I$ (n为单位线圈上的匝数)

4. 载流密绕螺绕环 $B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$ (N总匝数, r为距轴线的距离)

5. 无限大均匀载流导体平面 $B = \frac{\mu_0 j}{2}$ (j为面电流密度)

洛伦兹力

带电粒子在磁场中受力:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\begin{cases} \text{大小: } F = qvB \sin\theta \\ \text{方向: } \vec{v} \times \vec{B} \end{cases}$$

当电场与磁场同时存在时

$$q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

若考虑相对论效应

$$q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right]$$

带电粒子在磁场中的运动

$$qv_0 B = m \frac{v_0^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv_0}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = 2\pi \frac{m}{qB}$$

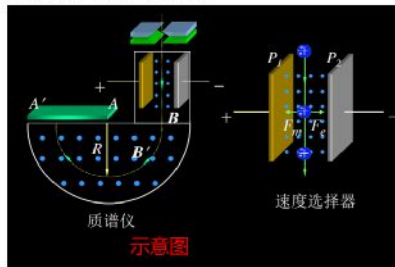
$$\begin{cases} \text{螺旋半径: } R = \frac{mv_{0n}}{qB} \\ \text{螺距: } h = v_{0x} T = v_{0x} \frac{2\pi m}{qB} \end{cases}$$

带电粒子在磁场中运动的应用

质谱仪

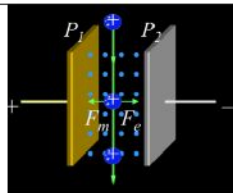
--利用磁场和电场的组合，把荷质比不同的粒子分离开来的一种仪器。质谱仪按应用范围分为同位素质谱仪、无机质谱仪和有机质谱仪。

$$R = \frac{mv_0}{qB}$$



速度选择器

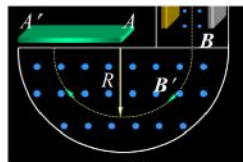
$$qvB = qE \Rightarrow v = \frac{E}{B}$$



粒子进入感应区后，做圆周运动，有：

$$\frac{q}{m} = \frac{v}{RB'} = \frac{E}{RBB'}$$

上式中R、E、B、B'均可测量，故荷质比可确定。



同步回旋加速器

由于相对论效应，使得回旋加速器不能无限增大半径来获取能量。当粒子接近光速时，粒子的质量：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\text{电子在半盒内回旋时间: } t = \frac{m\pi}{qB} = \frac{m_0\pi}{qB\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

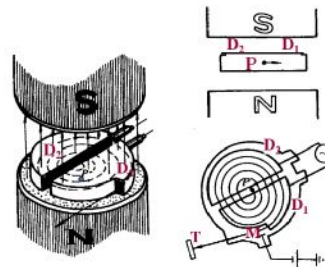
为保证电子通过间隙时能够加速，则要求：

$$v = \frac{1}{2t} \quad \text{即: } vm = qB/2\pi$$

式中q、B不变，通过改变高频电压频率来达到上式的平衡，称为同步加速器。

回旋加速器

通有高频电压的两个D形铜盒电极置于匀强磁场中，粒子在两盒缝隙中加速：



进入半盒内电子的回旋半径：

$$R = \frac{v}{(q/m)B}$$

电子在半盒内回旋时间：

$$t = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi}{(q/m)B}$$

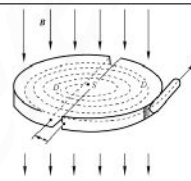
如果加速器的振荡频率为： $\nu = \frac{1}{2t}$, $T = 2t$

粒子到达缝隙时，会被反复加速，最后引出的半径为R，则：

$$v = \frac{q}{m} BR$$

此时，粒子的动能为：

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2}{2m}B^2R^2$$



磁聚焦

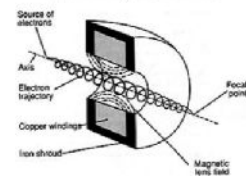
电子在电极板中发散（角度很小）后， v_0 分解成平行分量 $v_{0x} = v_0 \cos \theta \approx v_0$ 和垂直分量 $v_{0y} = v_0 \sin \theta = v_0 \theta$ 。设在磁场中运动的路径为l：

调节磁感应强度B使：

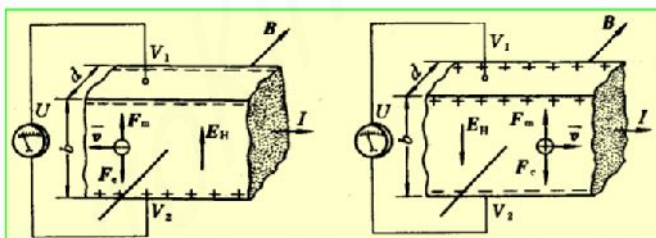
$$\frac{l}{v_{0x}T} = \frac{qBl}{2\pi m v_0} = n$$

可使电子射线聚焦于一点。

Electromagnetic Lenses



霍尔效应 (Hall Effect)



$$U = V_1 - V_2 = -\frac{IB}{ned}$$

$$U = V_1 - V_2 = \frac{IB}{nqd}$$

(对于正电荷)

霍尔系数为：

$$R_H = -\frac{1}{ne} \quad \text{或} \quad R_H = \frac{1}{nq}$$

安培力：载流导线在磁场中受到的力的作用

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int_L I d\vec{l} \times \vec{B}$$

磁场对平面载流线圈的作用

$$F_1 = BIl_1 \sin \theta$$

$$F'_1 = BIl_1 \sin(\pi - \theta) = BIl_1 \sin \theta$$

以上两力大小相等，方向相反，相互抵消。

导线AB、CD所受的磁力分别为：

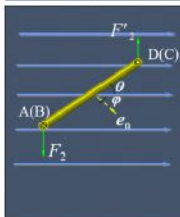
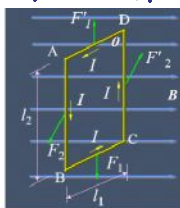
$$F_2 = F'_2 = BIl_2$$

此两力大小相等，方向相反。

但作用力不在同一直线上，形成一力偶，力臂 $l_1 \cos \theta$ ，作用在线圈上的力偶矩为：

$$M = F_2 l_1 \cos \theta = BIl_1 l_2 \cos \theta = BIS \cos \theta$$

式中 $S = l_1 l_2$ 。



$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

$$M = F_2 l_1 \cos \theta = BIl_1 l_2 \cos \theta = BIS \cos \theta$$

由于 $\varphi + \theta = \pi/2$ ，则： $M = BIS \sin \varphi$

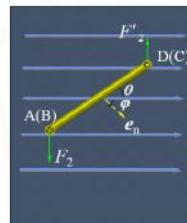
如线圈有N匝，则： $M = NBIS \sin \varphi = |\vec{p}_m| B \sin \varphi$

$p_m = NIS$ 为载流线圈的磁矩，

上式写成矢量式：

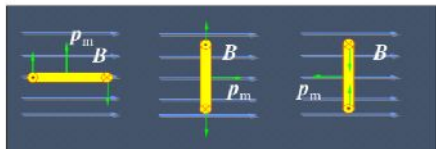
$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

上式虽从矩形线圈推得，但可证明它对均匀磁场中任意形状的平面载流线圈都适用。



讨论几种特殊情况：

- ①当 $\vec{p}_m$ 与 $\vec{B}$ 的夹角 $\varphi = \pi/2$ 时， M 最大。
- ②当 $\varphi = 0$ 时， $M = 0$ ，线圈处于稳定平衡。
- ③当 $\varphi = \pi$ 时， $M = 0$ ，但线圈处于不稳定平衡状态。



第6讲 稳恒磁场III, 电磁感应I

磁介质的分类

介质在磁场中被磁化, 介质内的磁感应强度 B 为真空磁感应强度 B_0 和附加磁感应强度 B' 之和

$$B = B_0 + B'$$

依据附加磁感应强度 B' 的不同可将磁介质分为三类:

顺磁质 $B > B_0$ 、抗磁质 $B < B_0$ 、铁磁质 $B \gg B_0$

物质磁性的来源?

原子中的电子参与自旋和绕核的轨道运动, 两种运动都会产生磁场。

轨道磁矩

$$p_m = IS = \frac{e}{2\pi r/v} \cdot \pi r^2 = \frac{evr}{2}$$

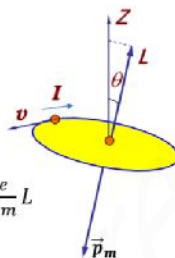
$$\text{角动量: } \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = mvr \vec{n} \quad \rightarrow \quad p_m = \frac{emvr}{2m} = \frac{e}{2m} L$$

$$\text{电子的角动量与磁矩反向: } \vec{p}_m = -\frac{e}{2m} \vec{L}$$

量子理论给出: $L = n\hbar$

$$\text{轨道磁矩的基本单位: } \mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9.274 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

$$\text{自旋磁矩 } \vec{p}_s = -\frac{e}{m} \vec{S}$$



顺磁质和抗磁质的磁化

分子电流, 分子磁矩

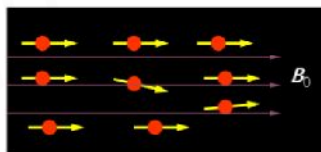
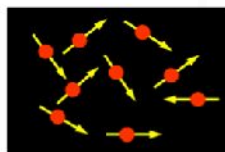
分子或原子中各电子对外界所产生磁效应的总和可等效于一个圆电流 —— 分子电流, 与分子电流相应的磁矩称为分子磁矩 —— p_m

顺磁质 $B > B_0$

顺磁质 $B > B_0$

$$U = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$$

在顺磁质中, 每个原子或分子都有一定的磁矩 p_m , 但由于热运动, $\sum p_m = 0$ 。但在外场的作用下, p_m 转向外场方向, 使 $\sum p_m \neq 0$ (远大于 $\sum p_m$), 且与外场同向, 这是顺磁性的起源。



抗磁质 $B < B_0$

抗磁质 $B < B_0$

在抗磁质中, 每个原子或分子中所有电子的轨道和自旋磁矩的矢量和等于零。

在外场 B_0 中只有附加磁矩 Δp_m 起作用, 磁体内大量分子的附加磁矩的矢量和 $\sum \Delta p_m$ 与外场方向相反, 这是抗磁性的起源。

悬浮青蛙实验

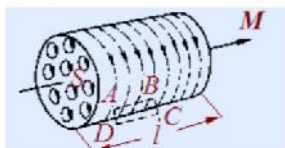
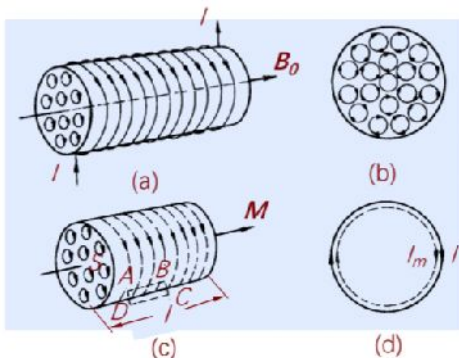


安德烈·海姆 (Andre Geim)
2010 物理诺奖

磁化(束缚)电流和磁化强度

以载流长直螺线管内的磁介质为例:

分子电流在内部相互抵消,而在表面形成分子面电流——**磁化电流**。磁化电流与 $\mathbf{M}$ 成右手关系。



若单位长度上的磁化电流密度为 j_m , 则 $\Delta I_m = j_m l$, 该介质段内总分子磁矩应等于磁化电流产生的磁矩, 即:

$$\sum_i \vec{p}_m = N_m S = j_m l S$$

$$|\mathbf{M}| = \frac{\sum_i p_m}{\Delta V} = \frac{j_m l S}{S l} = j_m$$

磁介质表面上某处磁化强度在数值上等于磁化电流的**线密度**。

$$\vec{j} = \vec{M} \times \vec{n}$$

$\vec{n}$ 为介质外法线方向

为表征磁介质的磁化程度引进磁化强度:

$$\mathbf{M} = \sum \vec{p}_m / \Delta V$$

对真空: $\mathbf{M} = 0$

$\mathbf{M}$ 单位: A/m

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum_{LA} I_m$$

存在磁介质时磁场的基线规律

磁场强度, 有磁介质时的安培环路定理

当传导电流的磁场中存在介质时: $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$

介质中的环路定律: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (\sum I + \sum I_m)$

将 $\oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum I_m$ 引入得: $\oint (\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}) \cdot d\vec{l} = \sum I$

引入磁场强度 $\mathbf{H}$: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (\text{A/m})$

[18-19] 一个通电的空心长直螺线管内部的磁感应强度为 $6.5 \times 10^{-4} \text{ T}$, 当插入铁芯后, 其内部的磁感应强度变为 1.4 T , 则铁芯内部的磁感应强度 $H = \underline{\hspace{1cm}} \text{ A/m}$; 铁芯的相对磁导率 $\mu = \underline{\hspace{1cm}}$.

$$H = \frac{B_0}{\mu_0} = 517$$

$$\text{由 } B = \mu_r B_0 \text{ 得 } \mu = \frac{B}{B_0} = 2154$$

有介质时的安培环路定理: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$

存在磁介质时的磁场高斯定理: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint (\vec{B}_0 + \vec{B}') \cdot d\vec{S} = 0$

$\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{H}$ 之间的关系

由 $\mathbf{H}$ 的定义式: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$

对各向同性的磁介质, $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{H}$ 成正比:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

χ_m 称为磁化率, 为无量纲量。

$\chi_m > 0$ 顺磁质, $\chi_m < 0$ 抗磁质, 对铁磁质 χ_m 很大, 且不是恒量。

法拉第电磁感应定律及楞次定律

当穿过一个闭合导体回路所包围面积内的磁通量发生变化时(无论这种变化是由什么原因引起的), 就会在该导体回路中产生电流。

这种现象称为**电磁感应现象**。

回路中所产生的电流称为**感应电流**;
相应的电动势则称为**感应电动势**。

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

$\vec{E}_k$: 非静电力外场

通过回路所包围面积的磁通量发生变化时, 回路中将产生感应电动势 ε_i ,

$$\varepsilon_i = -k \frac{d\phi}{dt}$$

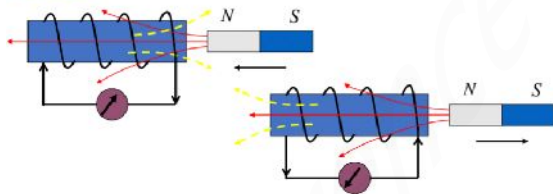
在国际单位制中比例系数 $k=1$

楞次定律

1833年, 楞次(Lenz)得出确定感应电流方向的法则, 称为楞次定律: 闭合回路中产生感应电流的方向, 总是使它所激发的磁场去阻止原磁通量的变化。

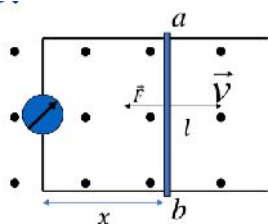


楞次



第7讲 电磁感应 II

动生电动势



长为 l 的导体棒在磁场中运动

磁通: $\phi = BS = Blx$

电动势: $\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi}{dt} = -Blv$

① (定义) $\mathcal{E}_i = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

② (法拉第电磁感应定律) $\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi}{dt}$

感生电动势

① (法拉第电磁感应定律) $\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

②
$$\begin{cases} \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \mathcal{E} = \int_a^b \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \end{cases}$$

(4) 涡旋电场与静电场的效应比较

相同处:

对电荷都有作用力。

若有导体存在都能形成电流

不相同处:

涡旋电场不是由电荷激发, 而是由变化磁场激发。

涡旋电场线不是有头有尾, 而是形成闭合回路。

自感与互感现象

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

自感系数 $L = \frac{\mu_0 \pi N^2 R^2}{l}$

在一般情况下, 全磁通的变化是由回路电流变化引起的,

此时自感系数 $L = \frac{d\psi}{dI}$

自感系数 (自感) 定义为: 回路中电流变化为单位值时, 在回路本身所围面积内引起的全磁通的改变值。

R-L 电路中电流的增长和衰减过程

单位: 亨利 (H), $1\text{H} = 1\text{Wb}/\text{A}$ 。

自感的计算: 先假定回路中通过一定电流 I , 在计算回路的磁通匝链数 Ψ , 那么

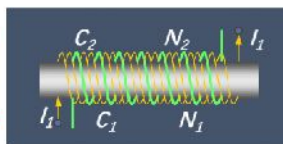
$$L = \frac{d\Psi}{dI}$$

自感与互感的关系

仍以两层螺线管为例, 两线圈的自感为:

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{l} \pi r^2 \quad L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{l} \pi r^2$$

互感: $M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2$



由此可见: $M^2 = L_1 L_2, \quad M = \sqrt{L_1 L_2}$

注意: 只有一个回路所产生的磁感应线全部穿过另一回路, 才有上述关系。对于一般的情形:

$$M = K \sqrt{L_1 L_2} \quad 0 \leq K \leq 1, \text{ 称为耦合系数。}$$

第8讲 电磁感应II

自感磁能

电场的能量密度: $w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} D \cdot E$

稳态时, 由欧姆定律: $\epsilon - L \frac{dI}{dt} = RI$

$$\int_0^t \epsilon I dt = \int_0^t L I dI + \int_0^t RI^2 dt$$

当 L 与 I 无关时: $\int_0^t \epsilon I dt = \frac{1}{2} L I^2 + \int_0^t RI^2 dt$

↓
克服感生电动势所做的功 ↓
电阻消耗在电阻上的热能

因此, 自感为 L 的回路中, 线圈中储存的磁能为: $W_m = \frac{1}{2} L I^2$

磁场的能量

对一个长直螺线管, 磁导率为 μ , 电流 I_0 , 则有

$$\begin{cases} B = \mu n I_0 \\ I_0 = \frac{B}{\mu n} \\ L = \frac{\mu N^2 S}{l} \end{cases}$$

将 L 、 I_0 代入 W_m 得

$$W_m = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{1}{2} \mu \frac{N^2}{l} S \cdot \frac{B^2}{(\mu N/l)^2} = \frac{1}{2} B H V$$

定义单位体积内的磁能为磁能密度:

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} B H \quad \text{or} \quad w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

位移电流

Maxwell提出: 变化的电场也可以看作是一种电流——位移电流:

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad I_d = \frac{d\phi_d}{dt}$$

电场中某点的位移电流密度等于该点电位移矢量的时间变化率。通过电场中某截面的位移电流等于通过该截面的电位移通量对时间的变化率。

电位移通量的一般表达: $\phi_d = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$

若曲面 S 不随时间变化, 位移电流可表达为:

$$I_d = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

全电流 / 全电流安培环路定理

全电流: $I_{\text{全}} = \sum I + I_d$ 全电流在任何情况下总是连续的

证: 将高斯定理推广到一般情况:

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

$$\frac{d}{dt} \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oiint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oiint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{dq}{dt}$$

将上式代入电荷守恒定律:

流出闭合曲面的电量, 等于闭合面内电量的减少,

$$\oiint \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\oiint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oiint \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0$$

此式说明全电流是连续的。