# 常微分方程

## 初等积分法

**可分离变量的微分方程**：$\frac{dy}{dx}=\varphi(x)\psi(y)$

$\longrightarrow$ $\psi(y)\neq 0$，正常积分即可

$\longrightarrow$ 若有 $y^*$ st. $\psi(y^*)=0$，则 $y=y^*$ 为一解

**零齐次微分方程（齐次方程）**：$\frac{dy}{dx}=g(\frac{y}{x})$

$\longrightarrow$ 作变量变换法　令 $u=\frac{y}{x}$，则 $\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}$$

1° $g(u)-u\neq 0$，正常积分即可

2° 若有 $u_0$ st. $g(u_0)-u_0=0$，则 $u=u_0$，$y=u_0x$ 为一解

**一阶线性微分方程 · 伯努利方程**

一阶线性微分方程 $\begin{cases} \text{一阶非齐次线性方程：} \frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x) \quad \cdots ① \\ \text{一阶齐次线性方程：} f(x)\equiv 0,\ \frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \quad \cdots ② \end{cases}$

$\longrightarrow$ 作变动任意常数法：由②解出，通解 $y=ce^{-\int p(x)dx}$

则①解的形式形同 $y=ue^{-\int p(x)dx}$，代回解出即可

E1：解方程 $\frac{dy}{dx}-y\cot x=2x\sin x$，$y|_{x=\frac{\pi}{2}}=0$

先解齐次线性方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\tan x}$，则 $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{\tan x}$

$\Rightarrow \ln|y|=\ln|\sin x|+c$　　为什么不是 $y=\pm c\sin x$？ $\longrightarrow$ c可定正负，无需±

则 $y=c\sin x$，变易常数c，令 $y=u\sin x$

则有 $\frac{dy}{dx}=\sin x\frac{du}{dx}+u\cos x$

$\sin x\frac{du}{dx}=2x\sin x \Rightarrow du=2x\,dx \Rightarrow u=x^2+c$

则 $y=(x^2+c)\sin x$

而 $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=(\frac{\pi^2}{4}+c)=0 \Rightarrow c=-\frac{\pi^2}{4}$，则 $y=(x^2-\frac{\pi^2}{4})\sin x$

E4：设 $F(x)=f(x)g(x)$，其中函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内存在导数且满足条件

$f'(x)=g(x)$，$g'(x)=f(x)$ 及 $f(0)=0$，$f(x)+g(x)=2e^x$，

求 $F(x)$

$F'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=g^2(x)+f^2(x)$

$=(f(x)+g(x))^2-2f(x)g(x)$

$=4e^{2x}-2F(x)$

则 $\begin{cases} 2F(x)+F'(x)=4e^{2x} \\ F(0)=0 \end{cases}$

即 $2y+\frac{dy}{dx}=4e^{2x}$

先解齐次线性方程 $\frac{dy}{2y}=-dx \Rightarrow \ln|2y|=-2x+c$

则

E2：求方程 $2x\frac{dy}{dx}-y=-x$ 的解

$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x}=-\frac{1}{2}$　　将 $x$ 均代作 $|x|$

先解齐次线性方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}$

则有 $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{2x} \Rightarrow \ln|y|=\frac{1}{2}\ln|2x|+c$

则 $y=c\sqrt{2x}$，变易常数c，令 $y=u\sqrt{2x}$

则 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{2x}\frac{du}{dx}+\frac{u}{\sqrt{2x}}$

原方程 $\Leftrightarrow \sqrt{2x}\frac{du}{dx}+\frac{u}{\sqrt{2x}}-\frac{u}{\sqrt{2x}}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -2du=\frac{dx}{\sqrt{2x}} \Rightarrow -2u=\sqrt{2x}+c$

$\Rightarrow -2y=2x+c\sqrt{2x} \Rightarrow y=-x+c\sqrt{|x|}$，$x\neq 0$

亦可按齐次方程的解法解之

E3：设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $|f(x)|\le K$，常数 $a>0$.

试证初值问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dx}+ay=f(x) \\ y(0)=0 \end{cases}$ 的解 $y(x)$

在区间 $[0,+\infty)$ 上满足 $|y(x)|\le\frac{K}{a}(1-e^{-ax})$

先解齐次线性方程 $\frac{dy}{dx}=-ay$

则有 $\frac{dy}{y}=-a\,dx \Rightarrow \ln|y|=-ax+c$

则有 $y=ce^{-ax}$，变易常数c，令 $y=ue^{-ax}$

$\frac{dy}{dx}+ay=e^{-ax}\frac{du}{dx}=f(x) \Rightarrow du=e^{ax}f(x)\,dx$

① 则 $\int du=\int e^{ax}f(x)\,dx\le\int e^{ax}|f(x)|\,dx\le\int e^{ax}K\,dx$

② 则 $y=e^{-ax}[\int_0^x f(t)e^{at}\,dt]$

$\le e^{-ax}[\frac{K}{a}(e^{ax}-1)]=\frac{K}{a}(1-e^{-ax})$

证毕.

## 全微分方程：$f(x,y)\,dx - dy = 0 \iff M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

若某二元函数 $u(x,y)$ 满足 $du(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$，

则 $u(x,y)$ 为全微分方程 $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ 的一个原函数

$\longrightarrow$ $u(x,y) = u(x_0,y_0)$ 是满足条件当 $x=x_0$ 时 $y=y_0$ 的积分，其中 $(x_0,y_0)\in G$，

且 $u(x,y) = c$ 是 $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ 的通积分，$c$ 为任意常数

## 定理（如何以 $M(x,y)$，$N(x,y)$ 判别方程是否为全微分方程？）

设函数 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 在单连通区域 $G$ 内连续且有连续的一阶偏导数，则方程 $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ 为全微分方程的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (x,y)\in G$$

$\longrightarrow$ 求原函数 $u(x,y)$，$du(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$

则 $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$，$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$

$$\Longrightarrow u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \varphi(y)$$

此处将 $y$ 看作常量，$\varphi(y)$ 是 $y$ 的任意可微函数

则有 $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + \varphi'(y) = N(x,y)$

即 $\varphi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$，求得 $\varphi(y)$

求 $(y^3 - 3xy^2 - 3x^2y)\,dx + (3xy^2 - 3x^2y - x^3 + y^2)\,dy = 0$ 的通积分

$du(x,y) = (y^3-3xy^2-3x^2y)\,dx + (3xy^2-3x^2y-x^3+y^2)\,dy$

$u(x,y) = xy^3 - \frac{3}{2}x^2y^2 - x^3y + \varphi(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 3xy^2 - 3x^2y - x^3 + \varphi'(y) = 3xy^2 - 3x^2y - x^3 + y^2$

$\Longrightarrow \varphi'(y) = y^2 \Rightarrow \varphi(y) = \frac{1}{3}y^3 + c$

则 $u(x,y) = xy^3 - \frac{3}{2}x^2y^2 - x^3y + \frac{1}{3}y^3 + c$

则通积分为 $xy^3 - \frac{3}{2}x^2y^2 - x^3y + \frac{1}{3}y^3 = c$

求微分方程 $y\,dx + x\,dy = 0$ 的通积分

通积分：$xy = c$

用凑微分的方法求方程 $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0$ 的通积分

$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c$

$\leftarrow$ $3x^2dx + 4y^3dy + 6xy(x\,dy + y\,dx) = 0$

$d(x^3+y^4) + 6xy\,d(xy) = 0$

$d(x^3 + y^4 + 3(xy)^2) = 0$

求微分方程 $(\cos x + \frac{1}{y})\,dx + (\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2})\,dy = 0$ 的通积分

$\cos x\,dx + \frac{1}{y}dy + \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$

$= d(\sin x + \ln|y|) + d(\frac{x}{y})$

$= d(\sin x + \ln|y| + \frac{x}{y}) = 0$

则通积分为 $\sin x + \ln|y| + \frac{x}{y} = c$

求微分方程的通解

(1) $y\,dx + (x + x^2y^2)\,dy = 0$

(2) $(-y + xy^2)\,dx + x\,dy = 0$

(3) $(y + x^2 + y^2)\,dx - x\,dy = 0$

(1) $d(xy) + x^2y^2\,dy = 0$

则有 $\frac{1}{(xy)^2}d(xy) + dy = 0$

$\Longrightarrow -\frac{1}{xy} = -y + C$

即有通积分：$y - \frac{1}{xy} = c$

且有另解 $y = 0$

(2) $(x\,dy - y\,dx) + xy^2dx = 0$

$\iff \frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} + x\,dx = 0$

$\iff d(\frac{x}{y}) + x\,dx = 0$

即 $\frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 = c$ 为通积分

且有另解 $y = 0$

(3) $\iff d(\frac{x}{y}) + ((\frac{x}{y})^2 + 1)\,dx = 0$

$\iff \frac{d(\frac{x}{y})}{(\frac{x}{y})^2+1} + dx = 0$

$\Longrightarrow \arctan\frac{x}{y} + x = C$

## 可降价的二阶微分方程

一、$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ 型的微分方程　　积分两次即可求解

求微分方程 $y''(x + y'^2) = y'$ 满足初值条件 $y(1) = y'(1) = 1$ 的特解.

令 $\frac{dy}{dx} = p$，则有 $\frac{dp}{dx}(x + p^2) = p$

$\Longrightarrow dp\,(x + p^2) - p\,dx = 0$

则有 $\frac{x\,dp - p\,dx}{p^2} + dp = 0 \iff -d(\frac{x}{p}) + dp = 0 \Rightarrow -\frac{x}{p} + p = c$

而当 $x=1$ 时，$-1+1 = c \Rightarrow c = 0$，则 $p = \sqrt{x} = \frac{dy}{dx}$

则 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}$

二、$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx})$ 型的微分方程

对于 $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$ 型的微分方程，可令 $y^{(n-1)} = p$ 得到 $y^{(n)} = \frac{dp}{dx}$，再逐次积分

三、$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y, \frac{dy}{dx})$ 型的微分方程

令 $\frac{dy}{dx} = p$，于是 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}p = f(y,p)$

求解方程 $(\frac{dy}{dx})^2 - y\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

令 $\frac{dy}{dx} = p$，则 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy}$

则有 $p^2 - \frac{y}{dy}\,p\,dp = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} p = 0 \Rightarrow y \text{为常数} \\ \text{or} \\ p - y\frac{dp}{dy} = 0 \Rightarrow p = c_1y \Rightarrow y = c_2e^{c_1x} \end{cases}$$

则有解 $y = c_2e^{c_1x}$

# 线性微分方程

## 线性微分方程解的一般理论

线性微分方程：未知函数 $y$ 及其导数 $\frac{dy}{dx}$，…，$\frac{d^n y}{dx^n}$ 是一次式的 n阶微分方程.

⟶ 一般形式：$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = f(x)$ $(*)$

当 $f(x) \not\equiv 0$ 时，称 $(*)$ 为非齐次线性微分方程，其中 $f(x)$ 称自由项

当 $f(x) \equiv 0$ 时，称 $(*)$ 为齐次线性微分方程

常记 $L[y] = \frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n(x)y$

### 齐次线性微分方程通解的结构

引理 2.1 ~ 2.3：设 $c_i$ 为常数，$y_i(x)$ 是函数且都有直到 n阶导数.

$$\begin{cases} L[cy] = cL[y] \\ L[y_1+y_2] = L[y_1]+L[y_2] \\ L\left[\sum_{i=1}^{m} c_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{m} c_i L[y_i] \end{cases}$$

[定理 2.2] 设 $y_1(x)$，…，$y_m(x)$ 是齐次线性方程 $L[y]=0$ 的 m个解，

$c_1$，…，$c_m$ 是 m个常数，则 $y=\sum_{i=1}^{m} c_i y_i(x)$ 亦为 $L[y]$ 的解

[朗斯基行列式] 设 m个函数 $y_1(x)$，…，$y_m(x)$ 有直至 m-1 阶的导数，则称

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_m(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_m'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & y_2^{(m-1)}(x) & \cdots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

为函数 $y_1(x)$，…，$y_m(x)$ 的朗斯基判别式

[定理 2.3] 设 $y_1(x)$，…，$y_n(x)$ 是齐次线性方程的 n个解，则 $y_1(x)$，…，$y_n(x)$

在区间 $(a,b)$ 内线性相关的充分必要条件是它们的朗斯基行列式

$$W(x) \equiv 0 \quad , x\in(a,b)$$

⟶ 则线性无关的充分必要条件是 $W(x) \neq 0$，$x \in (a,b)$

[定理 2.4] 设 $y_1(x)$，…，$y_n(x)$ 是齐次线性方程 $L[y]=0$ 的 n个线性无关的解，

$c_1$，…，$c_n$ 是 n个任意常数，则 $y(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$ 为 $L[y]=0$ 的通解

[定理 2.5] $L[y]=0$ 必且正好有 n个线性无关的解，即 $L[y]$ 的基本解组必存在

## 非齐次线性微分方程的通解结构

「引理 2.4」

(1) 设 $y_1^*$ 与 $y_2^*$ 是非齐次线性方程 $L[y]=f(x)$ 的两个解，则 $y_1^*-y_2^*$ 是对应的齐次线性方程 $L[y]=0$ 的一个解

(2) 设 $y^*$ 与 $y$ 分别是非齐次线性方程 $L[y]=f(x)$ 的一个解及对应的 $L[y]=0$ 的一个解，则 $y^*+y$ 也是 $L[y]=f(x)$ 的一个解

「定理 2.6」 设 $y^*$ 是非齐次线性方程 $L[y]=f(x)$ 的一个解，$Y$ 是 $L[y]=f(x)$ 所对应的齐次线性方程 $L[y]=0$ 的通解，则 $y=Y+y^*$ 是 $L[y]=f(x)$ 的通解

「定理 2.7」 设函数 $y_1$ 与 $y_2$ 分别是有相同左端的两个非齐次线性方程 $L[y]=f_1(x)$ 与 $L[y]=f_2(x)$ 的解，则 $y_1+y_2$ 是方程 $L[y]=f_1(x)+f_2(x)$ 的解

「定理 2.8」 设 $y=u(x)+iv(x)$ 是方程 $L[y]=U(x)+iV(x)$ 的解，其中所有系数以及 $U(x)$, $V(x)$, $u(x)$ 和 $v(x)$ 都是实变量 $x$ 的实函数，$i=\sqrt{-1}$，则解 $y=u(x)+iv(x)$ 的实部 $u(x)$ 和虚部 $v(x)$ 分别是 $L[y]=U(x)$ 和 $L[y]=V(x)$ 的解.

## 常系数线性微分方程的解法

### 二阶常系数齐次线性微分方程的解法

| 特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根 | 微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0$ 的通解 |
|---|---|
| 有不相等的实根 $\lambda_1\neq\lambda_2$ | $y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$ |
| 有相等的实根 $\lambda_1=\lambda_2$ | $y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2xe^{\lambda_1x}$ |
| 有共轭复数根 $\begin{cases}\lambda_1=\alpha+i\beta\\ \lambda_2=\alpha-i\beta\end{cases}$ | $\begin{cases}y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)\\ y=Ae^{\alpha x}\sin(\beta x+\varphi)\end{cases}$ |

「E1」 求微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0$ 的通解

令 $y=e^{\lambda x}$

则有 $\lambda^2-2\lambda-3=0 \Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda+1)=0$

$\lambda_1=3$, $\lambda_2=-1$

则有通解 $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$

「E5」

「E2」 求方程 $\frac{d^2s}{dt^2}-4\frac{ds}{dt}+4s=0$，$\frac{ds}{dt}\big|_{t=0}=2$，$s\big|_{t=0}=0$ 的特解

特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+4 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2$

则有通解 $s=c_1e^{2t}+c_2te^{2t}$

则 $s'=2c_1e^{2t}+c_2e^{2t}(2t+1)$

$\begin{cases}2=2c_1+c_2\\ 0=c_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c_1=0\\ c_2=2\end{cases}$

则有特解 $s=2te^{2t}$

「E3」 求方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+13y=0$ 的通解

特征方程：$\lambda^2+4\lambda+13=0 \Leftrightarrow (\lambda+2)^2=-9$

$\lambda_1=-2+3i$, $\lambda_2=-2-3i$

$y=Ae^{-2x}\sin(3x+\varphi) \longrightarrow$ 通解

「E4」 求微分方程 $y''+6y'+(9+a^2)y=0$ 的通解，其中 $a$ 是常数

特征方程 $\lambda^2+6\lambda+9+a^2=0$

$\Leftrightarrow (\lambda+3)^2=-a^2$

$\lambda=-3\pm ai$

1° 若 $a\neq0$，$A=Ae^{-3x}\sin(ax+\varphi)$

2° 若 $a=0$，$y=(c_1+c_2x)e^{-3x}$

## n阶常系数齐次线性微分方程的解

[定理 2.9] 设常系数齐次线性微分方程 $L[y]=0$ 的特征方程 $D(\lambda)=0$ 有 s 个各不相同的特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，它们的重数分别为 $n_1,\cdots,n_s$；$n_1+\cdots+n_s=n$，则 $L[y]=0$ 的通解为 $y=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i} C_{ij}x^{j-1}e^{\lambda_i x}$

| 特征方程 $D(\lambda)=0$ 的根 | 微分方程 $L[y]$ 通解中对应的项 |
|---|---|
| 单重实根 $\lambda$ | 对应一项 $ce^{\lambda x}$ |
| k重实根 $\lambda$ | 对应k项 $(c_1+c_2x+\cdots+c_kx^{k-1})e^{\lambda x}$ |
| 单重复数根 $\lambda_{1,2}=a\pm\beta i$，$\beta>0$ | 对应两项 $e^{ax}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$ |
| k重复数根 $\lambda_{1,2}=a\pm\beta i$，$\beta>0$ | 对应2k项 $e^{ax}[(a_1+a_2x+\cdots+a_kx^{k-1})\cos\beta x + (b_1+b_2x+\cdots+b_kx^{k-1})\sin\beta x]$ |

# 变系数线性微分方程

## 欧拉方程：
$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=f(x)$$

$\longrightarrow$ 令 $t=\ln|x|$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\end{cases}, \cdots\cdots$$

## 二阶变系数齐次线性微分方程
$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$$

该方程绝大多数情况要猜出特解，但一般均为 $y=x$ or $y=e^x$

$\longrightarrow 1^\circ$ 已知一特解 $y_1$

由刘维尔公式 $y=y_1\left[C_1+C_2\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx\right]$

$2^\circ$ 若 $2p'(x)+p^2(x)-4q(x)=a$，$a\in R$

令 $y=ue^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}$，代入得 $u''-\frac{a}{4}u=0$

此处一般可用另设变量得出，但该条件可快速得出可行的变量代换

## 二阶变系数非齐次线性微分方程

若齐次通解未知，可由上一方程求得

$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x)$ ，已知齐次通解 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$

→ 朗斯基行列式 $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$

则特解 $y_p = -y_1\int\frac{y_2(x)}{W(x)}f(x)\,dx + y_2\int\frac{y_1(x)}{W(x)}f(x)\,dx$

方程解为 $y = y_p + C_1y_1 + C_2y_2$

→此法实质可由常数变易法求得
即令 $C_1 = u_1(x)$, $C_2 = u_2(x)$
但一般特解可直接看出，若看不出再用此法

## 常系数齐次线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T$$

→ 解 $|A-\lambda E|=0$ 得若干特征根

单重实根 $\lambda_i$ ： $x = C_1e^{\lambda_1 t}V_1 + C_2e^{\lambda_2 t}V_2 + \cdots + C_ne^{\lambda_n t}V_n$

重根 $\lambda_i$ ： $x = e^{\lambda t}\left(V_0 + tV_1 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}V_{k-1}\right)$

复根 $\lambda = \alpha \pm i\beta$ ： $x = e^{\alpha t}[\,C_1(a\cos\beta t - b\sin\beta t) + C_2(a\cos\beta t + b\sin\beta t)\,]$