

概率论与数理统计

第一章 概率论的基本概念

随机试验

确定性现象、不确定性现象 $\begin{cases} \text{个别现象} \\ \text{随机现象} \end{cases}$

随机试验：①可重复 ②可预测 ③结果未知

样本空间(S)：随机试验的所有可能结果构成

样本点：随机试验的每一个结果

基本事件：由一个样本点组成的单点集

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

当 $AB = \emptyset$ 时，称事件 A 与 B 是互不相容的，或互斥的

对立事件：若 $\begin{cases} A \cup B = S \\ AB = \emptyset \end{cases}$ ，则 A, B 互逆

德摩根律：
$$\overline{\bigcup_{j=1}^n A_j} = \bigcap_{j=1}^n \bar{A}_j, \quad \overline{\bigcap_{j=1}^n A_j} = \bigcup_{j=1}^n \bar{A}_j$$

频率与概率

频率：
$$f_n(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{\text{频数}}{\text{总数}}$$

概率：

定义1： $f_n(A)$ 的稳定值 P 定义为 A 的概率，记为 $P(A) = P$

定义2：将概率视为测度，应满足

(1) $P(A) \geq 0$; (2) $P(S) = 1$; (3) $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_i A_j = \emptyset \ (i \neq j) \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

和事件：
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

定义2：将概率视为测度，且满足：

1: $P(A) \geq 0$

2: $P(S) = 1$

3: $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_i A_j = \emptyset \ (i \neq j), \rightarrow \text{相互独立}$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

等可能概型(古典概型) →

(有限性) 试验中 S 样本点有限

(等可能性) 出现每一样本点的概率相等

$$P(A) = \frac{A \text{ 所包含的样本点数}}{S \text{ 中的样本点数}}$$

条件概率 → $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, P(A) \neq 0$

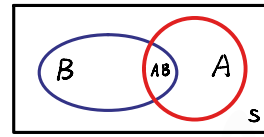
性质:

(1) 非负性: $P(B|A) \geq 0$

(2) 规范性: $P(S|A) = 1$

(3) 可列可加性: $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$, 两两互斥 $\Rightarrow$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | A)$$



全概率公式与 Bayes 公式

设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为样本空间 S 的一个划分, $P(B_i) > 0, i=1, 2, \dots, n$, 则称:

全概率公式: $P(A) = \sum_{j=1}^n P(B_j) \cdot P(A|B_j)$

接上述公式, 且 $P(A) > 0$, 则有 Bayes 公式:

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}$$