

## 第二章 随机变量及其概率分布

**随机变量**: 设随机试验的样本空间为  $S$ , 若  $X$  为定义在样本空间上的单实值函数,  $e \in S$ , 则称  $X$  为随机变量。

**离散型随机变量**: 若随机变量  $X$  的所有可能取值为有限个或无限个几个重要的离散型随机变量:

①  $X$  服从参数为  $p$  的 0-1 分布, 或两点分布

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $X$ | 0   | 1   |
| $p$ | $q$ | $p$ |

记为  $X \sim 0-1(p)$  or  $B(1, p)$

$$P(X=k) = p^k (1-p)^{1-k}, k=0, 1$$

只有两个可能结果的试验, 称为 Bernoulli 试验

③ 泊松分布 (Poisson 分布)

若随机变量  $X$  的概率分布律为

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0, 1, \dots, \lambda > 0$$

称  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布, 记

$$X \sim \pi(\lambda) \quad E(X) = D(X) = \lambda$$

### 随机变量的分布函数

随机变量  $X$ , 对任意实数  $x$ , 称  $F(x) = P(X \leq x)$  为  $X$  的概率分布函数, 简称分布函数

$$F(x) = \sum_{\lambda_k \leq x} p_k$$

$F(x)$  的性质: 1)  $0 \leq F(x) \leq 1$

2)  $F(x)$  单调不减, 且  $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$

$$\therefore 0 \leq P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

3)  $F(x)$  右连续, 即  $F(x+0) = F(x)$ .

$$4) F(x) - F(x-0) = P(X=x)$$

### 连续型随机变量及其概率密度

对于随机变量  $X$  的分布函数  $F(x)$ , 若存在非负函数,

使对于任意实数  $x$  有  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

则称  $X$  为连续型随机变量

$f(x)$ :  $X$  的概率密度函数, 简称 概率密度

$f(x)$  的性质: 1)  $f(x) \geq 0$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

3) 对于任意的实数  $x_1, x_2 (x_2 > x_1)$

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \Rightarrow P(X=a)=0$$

4) 在  $f(x)$  连续点  $x$ ,  $F'(x) = f(x)$

即在  $f(x)$  的连续点

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X \leq x+\Delta x)}{\Delta x}$$

## 几个重要的连续量

### ① 均匀分布

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad X \text{ 在 } (a, b) \text{ 上均匀分布, } X \sim U(a, b)$$

### ② 指数分布

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\lambda > 0, X \text{ 服从参数为 } \lambda \text{ 的指数分布} \\ &X \sim \text{Exp}(\lambda), E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

### ③ 正态分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

## 随机变量的函数分布

一般, 若已知 $X$ 的概率分布,  $Y=g(X)$ , 求 $Y$ 的概率分布的过程为: ---- 等价变换法

1. 若 $Y$ 为离散量, 则先写出 $Y$ 的可能取值:

$y_1, y_2, \dots, y_j, \dots$ , 再找出 $(Y = y_j)$ 的等价事件 $(X \in D)$ , 得 $P(Y = y_j) = P(X \in D)$ ;

2. 若 $Y$ 为连续量, 则先写出 $Y$ 的概率分布函数:

$F_Y(y) = P(Y \leq y)$ , 找出 $(Y \leq y)$ 的等价事件 $(X \in D)$ , 得 $F_Y(y) = P(X \in D)$ ; 再求出 $Y$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$ ;

关键是找出等价事件。