第五章 大数定律和中心极限定理

大数定律

设 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 是一列随机变量，$E(X_i)=\mu$，则在一定条件下，随机变量序列 $Y_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ 收敛到 μ

随机变量序列依概率收敛的定义

随机变量序列 $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots$，若存在某常数 a，使得 $\forall \varepsilon>0$，均有：$\lim\limits_{n\to+\infty} P\{|Y_n-a|\geq\varepsilon\}=0$，则称 $\{Y_n\}$ 依概率收敛于常数 a.

记为 $Y_n \xrightarrow{P} a$，当 $n\to+\infty$ 时

切比雪夫不等式：

对于任意 $\varepsilon>0$，都有 $P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

等价为：$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\} \geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

切比雪夫大数定律：

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立，具有相同的数学期望 μ 和相同的方差 σ^2，则当 $n\to+\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu$.

辛钦大数定律：

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布，$E(X_i)=\mu$，则当 $n\to+\infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu$$

贝努里大数定律

设 n_A 为 n 重贝努里试验中事件A发生的次数，并记事件A在每次试验中发生的概率为 p，则有

$$\frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} p,\ \text{当 } n\to+\infty \text{ 时.}$$

中心极限定理

独立同分布的中心极限定理

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布，$E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2$，则当 n 足够大时

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

推论：设 n_A 为 n 重贝努里试验中 A 发生的次数，$P(A)=p\ (0<p<1)$，则对任何实数 x，有

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{n_A-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \phi(x)$$

即，$B(n,p) \overset{\text{近似}}{\sim} N(np, np(1-p))$，当 n 充分大时